

Національний центр аерокосмічної освіти молоді ім. О.М.Макарова

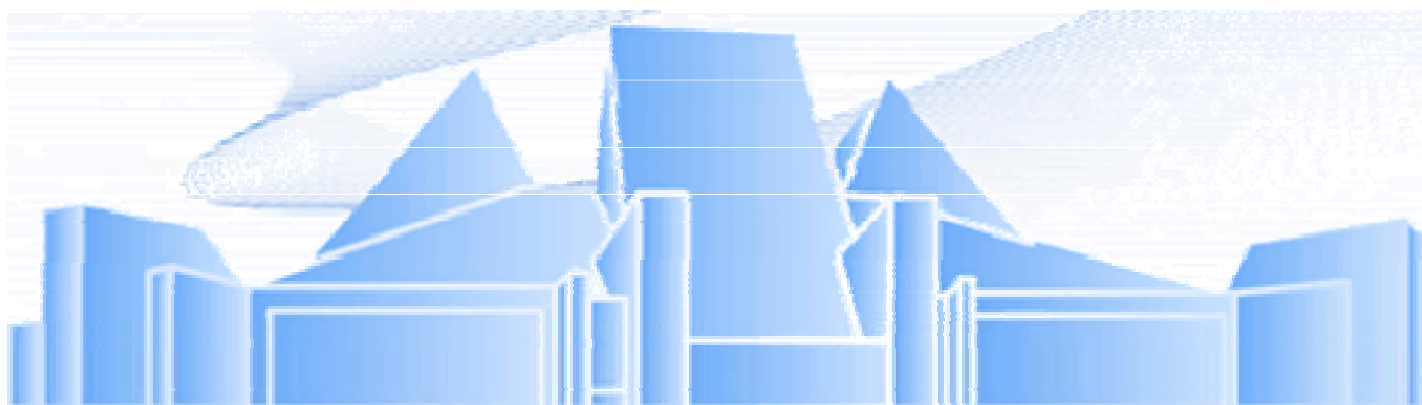
*Заочна аерокосмічна школа
"Всесвіт"*

МЕХАНІКА ТІЛ ЗМІННОЇ МАСИ

Методичні розробки і завдання № 1

Підготував кандидат технічних наук, доцент ДНУ

В.Ю.Шевцов



м. Дніпропетровськ
2011

Зміст

I. МЕХАНІКА ТІЛ ЗМІННОЇ МАСИ	2
1. ЗАКОНИ ЗБЕРЕЖЕННЯ В МЕХАНІЦІ	2
2. РЕАКТИВНИЙ РУХ. ФОРМУЛА ЦІОЛКОВСЬКОГО	4
3. СИЛА ТЯГИ. ПРИСКОРЕННЯ ТА ШЛЯХ, ПРОЙДЕНИЙ РАКЕТОЮ	5
4. ДОДАТКОВА ІНФОРМАЦІЯ	5
5. ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ	7
6. ВПРАВИ	7
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....	8

Юний друже!

Пропонуємо тобі подорож в чарівну країну космічних мандрівок. Але перед тим, як відправитись у перший політ до Місяця, а потім до планет Сонячної системи та до найближчих зірок, ми повинні мати необхідне спорядження. Знання законів фізики та наявність найпростіших уявлень про той простір, де проляжуть шляхи дослідження Всесвіту, будуть потрібні нам перед тим, як рушимо в космічну подорож. А тому спочатку ми згадаємо про закони збереження руху та енергії, щоб на їх основі познайомитись з механікою тіл змінної маси, з формулою Ціолковського, що описує рух реактивних апаратів у космічному просторі. Після цього ми познайомимося з фізичними основами польоту в полях тяжіння планет, а також з умовами польоту за межами Землі.

Вільний рух космічних апаратів, як і всіх небесних тіл, підкорюється законам Кеплера, а тому ми познайомимося з формами орбіт, найкращими траєкторіями польоту в полях тяжіння планет і зірок. Ми будемо вчитись рухатись до Місяця, Венери, Марса та інших планет. Ми навчимося маневрувати в міжзоряному просторі, спускатись на планети і пришвартовуватись до міжпланетних станцій, полетимо до зірок...

Оволодіти необхідними знаннями можливо лише при наявності відповідей на ті запитання і задачі, які будуть запропоновані тобі в домашніх завданнях. І якщо ти здолаєш цю, свою першу зоряну дорогу, перед тобою відкриються нові обрії пізнання твого життя і життя Всесвіту! Тож щасливої тобі подорожі!

I. Механіка тіл змінної маси

1. Закони збереження в механіці.

Закони збереження в природі говорять про те, що деякі фізичні величини не можуть зникнути безслідно, або виникнути з нічого. В механіці до таких величин відносяться енергія **E**, кількість руху **P** і момент кількості руху **L**.

Енергією тіла **E** називають здатність цього тіла виконувати роботу. Розрізняють два види енергії: кінетичну - **W** і потенціальну **U**.

Під кінетичною енергією розуміють роботу, яку необхідно виконати для надання тілу маси **m** швидкості **V**:

$$W = \frac{mV^2}{2}. \quad (1)$$

Під потенціальною енергією розуміють роботу, яку необхідно виконати для зміни стану взаємного розташування тіл (наприклад тіла маси **m** по відношенню до Землі):

$$U = mgh, \quad (2)$$

де **g** - прискорення сили земного тяжіння;

h - висота тіла над Землею.

Зверніть увагу, що прискорення сили тяжіння розраховується по формулі

$$\mathbf{g} = \mathbf{G} \frac{M}{r^2}, \quad (3)$$

в якій $\mathbf{G} = 6,67 \times 10^{11} \frac{M^3}{кг\ c^2}$ - гравітаційна постійна,

M - маса нашої планети Землі в кг, $M = 5,97 \times 10^{24}$ кг,

r - відстань від центру тіла до центру Землі в м. r можна знайти по формулі $r = R + h$, де $R = 6370$ км - усереднений радіус Землі.

Закон збереження енергії формулюється таким чином: повна енергія замкнутої системи, яка не віддає своєї і не отримує енергії ззовні, залишається незмінною, тобто

$$\mathbf{E} = \mathbf{W} + \mathbf{U} = \mathbf{const}. \quad (4)$$

Замкнута система, в якій $E = \mathbf{const}$, називається консервативною.

Під кількістю руху розуміють добуток маси цього тіла m на його швидкість v :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Зміна кількості руху тіла постійної маси може відбуватись лише в результаті зміни швидкості і завжди обумовлена дією сили F за час t :

$$P_2 - P_1 = mV_2 - mV_1 = m(V_2 - V_1) = m(at) = ma \cdot t = Ft \quad (5)$$

Добуток Ft називають імпульсом сили. Щоб відрізнити кількість руху P тіла від імпульсу сили добуток Ft іноді позначають буквою J : $J = Ft$. Іншими словами, імпульс сили це величина зміни кількості руху тіла.

Закон збереження імпульсу формулюється так: повний імпульс замкнутої системи (на яку не діють зовнішні сили) залишається незмінним:

$$\bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \dots + \bar{P}_n + \dots = \bar{P}_{повне} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \mathbf{const}, \quad (6)$$

або

$$\vec{F}_1 t + \vec{F}_2 t + \dots + \vec{F}_i t + \dots = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n) t = \vec{R} t,$$

де \vec{R} - рівнодіюча всіх сил, що діють на тіло.

У разі, коли на тіло не діють зовнішні сили, величина повного імпульсу не змінюється, але це не значить, що не може бути перерозподілу імпульсу тіла між його складовими частинами.

Такий перерозподіл здійснюється за рахунок внутрішніх сил системи. При цьому геометрична сума імпульсів тіл, що входять до системи, залишається постійною при будь-яких взаємодіях складових тіл системи між собою. В цьому випадку закон збереження імпульсу можна сформулювати як закон збереження положення центру мас тіла. Іншими словами, при дії лише внутрішніх сил центр маси залишається в стані спокою або руху з постійною початковою швидкістю.

Якщо скористатись ефектом дії внутрішніх сил, то за рахунок перерозподілу імпульсу між складовими частинами тіла отримаємо можливість для виділеної частини тіла отримати потрібне значення швидкості, що обмежується лише законом збереження енергії тіла (системи).

Під моментом кількості руху, або моментом імпульсу тіла, розуміють добуток імпульсу тіла на відстань (плече) між вектором імпульсу і центром (віссю) обертання (рис. 1).

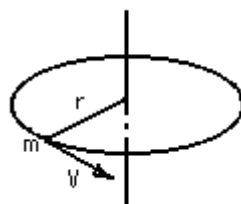


Рис.1

$$L = Pr = mvr. \quad (7)$$

Для суцільного тіла, що обертається навколо осі момент кількості руху дорівнює моменту інерції тіла I на кутову швидкість ω

$$L = I \omega \quad (8)$$

Зверніть увагу: Момент інерції J відіграє в обертовому русі таку ж роль, як маса m в поступальному. Закон Ньютона для поступального руху записується як $F = ma$, а для обертового $M = I \cdot \mathcal{E}$, де M - момент, \mathcal{E} - кутове прискорення.

Якщо тіло m рухається не по колу, а по криволінійній траєкторії (Рис.2),

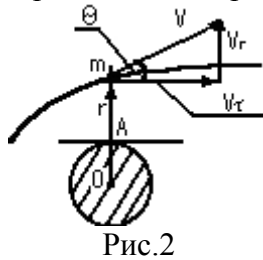


Рис.2

то момент кількості руху обчислюється по формулі:

$$L = m r v \cos \theta = m v_t r,$$

де θ - кут між вектором швидкості V і перпендикуляром до r . По суті, це кут нахилу вектору V до місцевого горизонту - дотичної в точці A до поверхні Землі. В балістиці - науці про рух тіла в полі тяжіння - цей кут називається кутом тангажу.

Закон збереження моменту кількості руху формулюється наступним чином: Якщо на тіло не діють зовнішні сили, то повний момент кількості руху не змінюється:

$$L = m r v \cos \theta = \text{const.}$$

2. Реактивний рух. Формула Ціолковського.

Якщо тіло знаходиться в космічному просторі, де відсутнє зовнішнє середовище, єдиним засобом змінити стан руху є перерозподіл повного імпульсу між частинами тіла. Принцип перерозподілу повного імпульсу за рахунок внутрішньої енергії називається принципом реактивного руху, а системи, які побудовані на цьому принципі, називають ракетами. На сьогодні ракети - єдиний відомий вид транспорту, рух якого не залежить від присутності зовнішнього середовища (в звичному для нас розумінні). Якщо позначити масу ракети через M_0 , порцію речовини, що відкидається m , а її швидкість w , то можемо записати формулу для швидкості маси ракети V_1 , що залишалась:

$$M_0 V_0 = 0 \rightarrow (M-m) V_1 = m W$$

звідки

$$V_1 = \frac{m W}{M - m}$$

Після відкидання другої порції m матимемо

$$V_2 = \frac{m W}{M - 2m},$$

а після n -ї порції

$$V_n = \frac{m W}{M - n m} \quad (10)$$

Загальна, кінцева швидкість, яку отримає ракета маси $(M - nm)$, дорівнює

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n. \quad (11)$$

Як показав К.Е. Ціолковський, послідовність (11) при умові зменшення порцій m і безперервного їх відкидання, може бути переписана як

$$V_{\text{ц}} = W \ln \frac{M_0}{M_k} = 2,3 W \cdot \lg \frac{M_0}{M_k} = 2,3 W \lg Z, \quad (12)$$

де: M_0 - початкова маса ракети;

M_k - кінцева (після вигорання палива) маса ракети $M_k = M_0 - M_n$;

Z - число Ціолковського; показує як змінюється швидкість ракети в залежності від співвідношення початкової маси ракети до кінцевої;

W - швидкість витоку продуктів згорання палива з камер реактивного двигуна.

3. Сила тяги. Прискорення та шлях, пройдений ракетою.

Із закону збереження імпульсу

$$(M_0 - m)V = MV = mW$$

можна записати вираз для реактивної сили P , що виникає при витіканні продуктів згорання палива. Для цього розділимо праву і ліву частини формули на час перерозподілу імпульсу тіла t :

$$M \frac{V}{t} = \frac{m}{t} \cdot W,$$

або, що теж саме:

$$Ma = \dot{m}W = P \quad (13)$$

де: M - змінна маса ракети, кг;

a - прискорення ракети, м/с^2 ;

\dot{m} - швидкість витрати маси, кг/с ;

W - швидкість витоку струменю, м/с .

Таким чином, бачимо, що реактивна сила, або як її називають, сила тяги P , може бути знайдена, як добуток секундної витрати палива \dot{m} на швидкість витоку продуктів згорання W . Сила тяги P розганяє ракету до потрібної швидкості.

Прискорення ракети в будь-яку секунду польоту можна знайти як

$$a = \frac{P}{M(t)} = \frac{P}{M_0 - \dot{m}t}, \quad (14)$$

де $M(t)$ маса ракети на дану секунду польоту. Ця маса дорівнює початковій за вирахуванням палива, яке згоріло $\dot{m}t$ на даний момент польоту t : $M(t) = M_0 - \dot{m}t$. (15)

Шлях S , який пройде ракета, починаючи рух з $V_0=0$ - з нульовою початковою швидкістю (у випадку відсутності поля тяжіння) за час t , може бути розрахований по формулі:

$$S = Wt \left(1 - \frac{\ln Z}{Z - 1}\right), \quad (16)$$

де: $Z = \frac{M_0}{M_k} = \frac{M_0}{M_0 - \dot{m}t}$ -- число Ціолковського на момент t .

4. Додаткова інформація

У формулі (1.12) для обчислення швидкості руху ракети (швидкості Ціолковського, або характеристичної) для багатьох учнів незрозумілими є букви \ln і \lg . Щоб зрозуміти їх значення розглянемо алгебраїчний вираз

$$a^b = c$$

В цій формулі невідомою величиною може бути $a = x$, і тоді $x = \sqrt[b]{c}$, тобто ми знаходимо корінь ступеню b з числа c . Невідомим може бути $c = x$, і тоді $x = a^b$, де a підводимо в ступінь b . Ці дві операції вам добре знайомі. А що робити, якщо невідомим є показник ступеню:

$$a^x = c, x=?$$

В цьому випадку операція знаходження невідомого показника ступеню називається логарифмуванням і позначається значком **log** (так само, як операція складання - + , множення - x і т.д.). Записують цю операцію так:

$$x = \log_a c, \quad (17)$$

а читають: x (показник ступеню) дорівнює логарифму числа c по основі a.

Приклади: $3^x = 81 \Rightarrow x = \log_3 81 = 4.$

Дійсно: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81.$

$5^x = 125 \Rightarrow x = \log_5 125 = 3;$

Логарифми мають такі ж самі властивості, як і показники ступеню:

а) $c \cdot d = b^n \cdot b^m = b^{n+m} \Rightarrow \log_b(c \cdot d) = \log_b c + \log_b d = n + m;$

б) $\frac{c}{d} = \frac{b^n}{b^m} = b^{n-m} \Rightarrow \log_b \left(\frac{c}{d}\right) = \log_b c - \log_b d = n - m;$

в) $c^m = (b^n)^m = b^{nm} \Rightarrow \log_b(c^m) = m \cdot \log_b c = m \cdot n.$

Примітка: операції з логарифмуванням проводяться лише для однієї основи.

Основою логарифмів може бути яке завгодно число, але в зв'язку з використанням десятинної системи обчислення найчастіше вживається число 10. Щоб кожного разу в \log_{10} не писати число 10 записують десятинні логарифми так:

$$10^x = 1374 \Rightarrow x = \log_{10} 1374 = \lg 1374,$$

тобто замість \log_{10} пишуть **lg**.

В фізиці і в математиці зустрічається багато задач, в яких основою є число **e** = 2,72... Логарифми з основою **e** називаються натуральними і записуються як:

$$e^x = y \Rightarrow x = \log_e y = \ln y,$$

тобто замість \log_e пишуть **ln**.

Саме натуральний логарифм входить в формулу Ціолковського. Щоб знайти натуральний логарифм від числа Z (числа Ціолковського) можна скористатись мікрокалькулятором, таблицями Брадїса, а за їх відсутності – графіком логарифмічної функції, який легко побудувати самому:

Z	1	e	7,4	20,2
x=lnZ	0	1	2	3

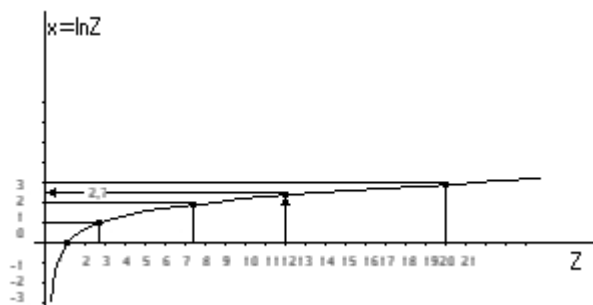


Рис. 3

$e^x = Z$	$x = \ln Z$
$e^0 = 1$	$0 = \ln 1$
$e^1 = e = 2,72$	$1 = \ln e$
$e^2 = 2,72^2 \approx 7,4$	$2 = \ln e^2 \approx \ln 7,4$
$e^3 = 2,72^3 \approx 20,2$	$3 = \ln e^3 \approx \ln 20,2$

Приклад (на рис.3):

$$x = \ln 12 = 2,7$$

Так само можна побудувати і графік для пошуку десятинних логарифмів

5. Запитання для самоконтролю

1. Яким чином можна збільшити швидкість ракети вдвічі?
Вказівка: відповідь на це питання знаходиться в формулі Ціолковського.
2. Що більше впливає на V_u : W чи Z ? І чому?
3. Як можна змінити значення імпульсу тіла?
4. Чи можна змінити положення центру мас тіла за допомогою внутрішніх сил?
5. Яка система називається консервативною?
6. Дві форми запису сили тяги.
7. Записати формулу Ціолковського.
8. Що таке логарифм і логарифмування?
9. Назвіть властивості логарифмів.
10. Як змінюється прискорення ракети з часом?
11. Як змінюється шлях, пройдений ракетою, з часом?
12. Чи залежить швидкість Ціолковського від часу роботи двигуна?

6. Вправи

Вправа 1. Прискорення земного тяжіння на поверхні землі $g_0 = 9,8 \text{ м/с}^2$. Знайти прискорення сили земного тяжіння на висоті $h = 1000 \text{ км}$ і 10000 км над поверхнею Землі. Радіус Землі $R_{\oplus} = 6370 \text{ км}$, $GM_3 = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2}$.

Відповідь: $g_1 = 7,5 \text{ м/с}^2$; $g_2 = 1,48 \text{ м/с}^2$.

Вправа 2. На висоті $H_1 = 630 \text{ км}$ над Землею круговою орбітою рухається космічний апарат КА₃ масою 1 т . Знайти кінетичну, потенціальну і повну енергію КА. Як зміниться значення цих енергій, якщо рух відбудуватиметься на висоті $H_2 = 1630 \text{ км}$? $R_3 = 6370 \text{ км}$; $GM_3 = 4 \cdot 10^5 \frac{\text{км}^3}{\text{с}^2}$.

Вказівка: Кругову швидкість КА на орбіті можна вирахувати по формулі $V_{\text{кр}} = \sqrt{gr}$, де $r = R_3 + H$.

Відповідь: $E_1 = 33,75 \cdot 10^9 \text{ Дж}$; $E_2 = 35,4 \cdot 10^9 \text{ Дж}$; $W_1 = 28,6 \cdot 10^9$; $W_2 = 25 \cdot 10^9 \text{ Дж}$; $u_1 = 5,15 \cdot 10^9 \text{ Дж}$; $u_2 = 10,4 \cdot 10^9 \text{ Дж}$.

Вправа 3: Маса ракети $M_0 = 10 \text{ кг}$. Маса палива $M_p = 8 \text{ кг}$. Швидкість витікання продуктів згорання 3000 м/с . Розрахуйте швидкість Ціолковського (характеристичну швидкість).

Відповідь: $V_c = 4830 \text{ м/с}$.

Вправа 4: Знайдіть швидкість ракети в разі миттєвого згорання палива (за даними вправи 3). Порівняйте знайдену швидкість з характеристичною. Яка з швидкостей більша і чому?

Відповідь: $V = 12000 \text{ м/с}$.

Вправа 5: Розрахуйте швидкість ракети, коли паливо згорає порціями: а) по 1 кг і б) по 2 кг (за даними вправи 3). Побудуйте графіки набору швидкості для випадку, коли порції відкидалися по одному разу в секунду.

Відповідь: $V = 6250 \text{ м/с}$.

Вправа 6: Знайти час роботи двигуна ракети t_k , якщо шлях, пройдений ракетою, $S=10\text{км}$, швидкість витoku продуктів згорання $W = 3\text{км/с}$, початкова маса ракети $M_0=7,4\text{кг}$, кінцева - $M_k=1\text{кг}$.

Відповідь: $t_k=4,84\text{с}$.

Вправа 7: Які числа Ціолковського повинна мати ракета, щоб забезпечити характеристичну швидкість в 10км/с при швидкості витoku газів $W=2\text{км/с}$, 4км/с , 6км/с , 10км/с ?

Відповідь: $Z_1=150$, $Z_2=12,2$, $Z_3=5,32$, $Z_4=2,72$.

Вправа 8: Ракета з масою $M_0=100\text{т}$ і секундною витратою палива $\dot{m}=50\text{кг/с}$ досягла швидкості $V_{\text{ц}}=8\text{ км/с}$. Швидкість витoku струменю газів $W = 4\text{км/с}$. Знайти час роботи двигуна t_k , силу тяги двигуна P , початкове і кінцеве прискорення ракети, шлях, пройдений ракетою за час t_k .

Відповідь: $t_k=1730\text{сек}$; $P=20\text{т}$; $a_0=2\text{м/с}^2$; $a_k=14,8\text{м/с}^2$; $S=4750\text{км}$.

Вправа 9: За даними вправи 8 побудуйте графіки зміни шляху і прискорення з часом, знайшовши по чотири точки:

$$a_0(t=0); a_1(t=\frac{t_k}{3}); a_2(t=\frac{2}{3}t_k); a_k(t_k); S_0(Z=1); S_1\left[Z_1\left(\frac{t_k}{3}\right)\right]; S_2\left[Z_2\left(\frac{2t_k}{3}\right)\right]; S_k(Z_k).$$

Відповідь: $a_1=2,78\text{м/с}^2$; $a_2=4,72\text{м/с}^2$; $a_k=14,8\text{м/с}^2$; $S_0=0$; $S_1=377\text{км}$; $S_2=1750\text{км}$; $S_4=4750\text{км}$.

Вправа 10: Якщо збільшити витрату палива з $\dot{m} = 50\text{ кг/с}$ до 100кг/с (вправа 8), то як це позначиться на

- силі тяги;
- прискоренні ракети;
- часі роботи двигуна;
- характеристичній швидкості ракети;
- пройденому шляху.

Рекомендована література.

- Панічкін, Спелушкін та інші. Конструкція та проектування КЛА, Машинобудування, М. 1986.
- Інженерний довідник по космічній техніці. Воєнне видавництво, М, 1977.
- Космонавтика. Енциклопедія. Радянська енциклопедія, М. 1985
- Підручник з фізики.